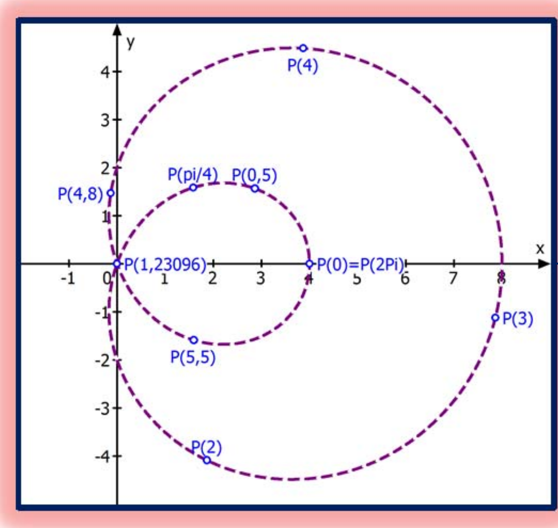


Pascalsche Schnecke

Text Nr. 54165

Stand 19. 3. 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Pascalsche Schnecke wird als Ortskurve definiert und ist eine algebraische Kurve 4. Grades. Sie ist (bis auf die Flächenberechnung) von Schülern gut behandelbar und eignet sich als interessantes Thema für eine Facharbeit.

Ganz tolle Animationen zur Pascalschen Schnecke findet man im Internet unter

http://www.bettlerei.de/index.php/pascalsche-schnecken.html

http://haftendorn.uni-lueneburg.de/analysis//polar/polar-kartes/pascal-polar-kartes.htm

Interessant ist auch:

http://www.johanneum-lueneburg.de/expo/jonatur/wissen/mathe/kurven/kardioid.htm

Inhalt

1 Definition und Gleichungen 3

1.1 Definition als Ortskurve

1.2 Kurvenbilder

1.3 Parametergleichungen

1.4 Koordinatengleichung

1.5 Polarkoordinatengleichung

2 Herleitung der Gleichungen 4

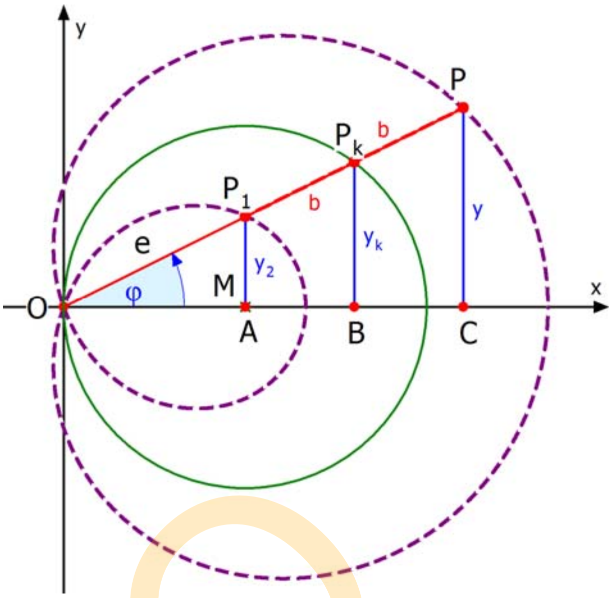
3 Berechnung der Extrempunkte in x- und y-Richtung 8

4 Fläche einer Pascalschen Schnecke 11

1 Definition und Gleichungen

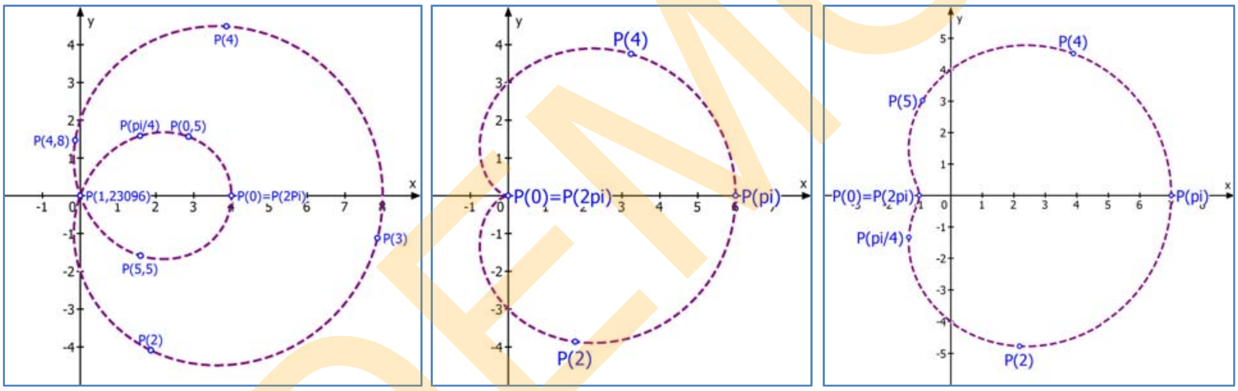
1.1 Definition:

Gegeben ist der Kreis k um $M(r\,|\,0)$ und dem Radius r. Ein Punkt P_k umlaufe den Kreis.
Mit ihm dreht sich die Ursprungsgerade (OP_k).
Trägt man auf ihr von P_k aus die **Strecke b** nach beiden Seiten ab, erhält man zwei Punkte P und P_1.
Als „**Pascalsche Schnecke**“ bezeichnet man die Ortskurve der Punkte P (gestrichelt).
Übrigens liegt dann auch P_1 auf dieser Kurve.



1.2 Kurvenbilder

Die Kurvenbilder hängen von den Größen 2r und b. Man unterscheidet gewöhnlich drei Fälle:



2r > b	2r = b	2r < b
$r = 3,\ b = 2$	$r = 1{,}5\ \ b = 3$	$r = 1{,}5,\ \ b = 4$

1.3 Parametergleichungen für $\varphi \in [\,0\,;2\pi[$. *Oft wird 2r durch a ersetzt.*

$$x(\varphi) = 2r\cdot\cos^2(\varphi) - b\cdot\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y(t) = 2r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - b\cdot\sin(\varphi)$$

Oder:

$$x(\varphi) = 2r\cdot\cos^2(\varphi) + b\cdot\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y(t) = 2r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) + b\cdot\sin(\varphi)$$

Hinweis: Die Abbildungen darüber wurden mit den Gleichungen erstellt, die ein Minuszeichen enthalten. Verwendet man das Pluszeichen, erhält man dieselben Kurven, nur mit Anderen Zuordnungen $\varphi \to \text{Punkt}$.

1.4 Koordinatengleichung: $\left(x^2 + y^2 - 2rx\right)^2 - b^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$

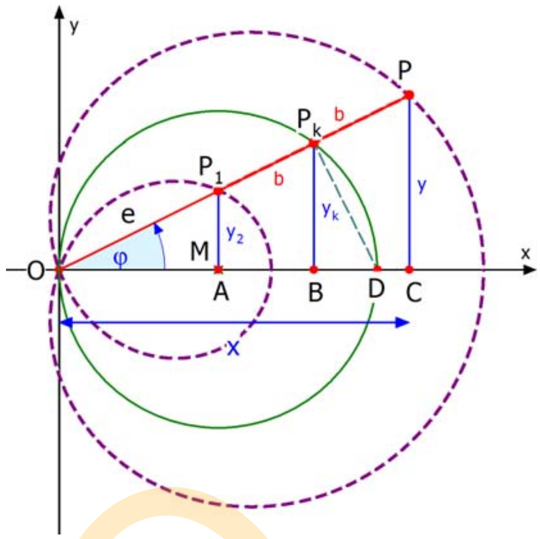
1.5 Polarkoordinatengleichung für $\varphi \in [\,0\,;2\pi[$

Äußerer Punkt: $R(\varphi) = \overline{OP} = 2r\cdot\cos(\varphi) + b$

Innerer Punkt: $e(\varphi) = \overline{OP_1} = 2r\cdot\cos(\varphi) - b$

2 Herleitung der Gleichungen

2.1 Parametergleichungen



Da P_k auf dem Kreis um M liegt, ist im Dreieck OP_kD bei P_k in rechter Winkel.

Daher kann man rechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{OP_k}}{\overline{OC}} = \frac{e+b}{2r} \quad \text{also:}$$

$$e + b = 2r \cdot \cos(\varphi) \qquad (1)$$

Im Dreieck OCP gilt dieses:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{x}{e+2b} \qquad (2)$$

(1) in (2): $\cos(\varphi) = \dfrac{x}{2r \cdot \cos(\varphi) + b}$

Umstellen: $x = (2r \cdot \cos(\varphi) + b) \cdot \cos(\varphi)$ bzw. $x = 2r \cdot \cos^2(\varphi) + b \cdot \cos(\varphi)$

Im Dreieck OCP gilt auch:

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{PC}}{\overline{OP}} = \frac{y}{e+2b} \qquad (3)$$

(1) in (3): $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{2r \cdot \cos(\varphi) + b}$

Umstellen: $y = (2r \cdot \cos(\varphi) + b) \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $y = 2r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi)$

2.2 Polarkoordinatengleichung für P:

Oben wurde für das Dreieck OP_kD hergeleitet: $e + b = 2r \cdot \cos(\varphi)$. (1)

Bezeichnet man die Länge der Strecke OP mit R, dann gilt: $R = e + 2b$

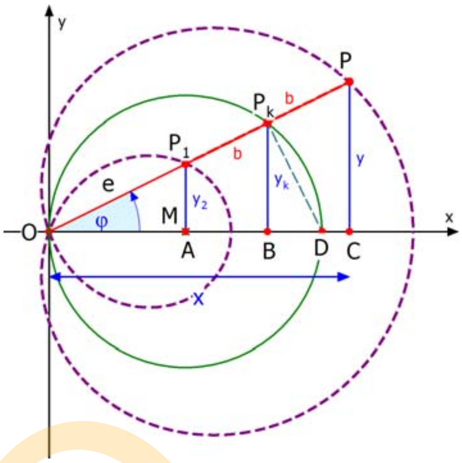
Zusammen folgt daraus: $R = 2r \cdot \cos(\varphi) + b$

Polarkoordinatengleichung für P:

Die Länge der Strecke OP_1 ist e, dann folgt: aus (1): $e = 2r \cdot \cos(\varphi) - b$

2.3 Koordinatengleichung für P

1. Herleitung. *(mit Trigonometrie)*



Im Dreieck OP_kD gilt: $\cos(\varphi) = \dfrac{\overline{OP_k}}{\overline{OD}} = \dfrac{e+b}{2r}$

Also $e + b = 2r \cdot \cos(\varphi)$ (1)

Bezeichnet man die Länge der Strecke OP mit R, dann gilt:

$$R = e + 2b$$

Zusammen folgt daraus: $R = 2r \cdot \cos(\varphi) + b$ (2)

Im Dreieck OPC gilt: $R^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Einsetzen in (2): $\sqrt{x^2+y^2} = 2r \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + b \quad | \cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2 + y^2 = 2rx + b \cdot \sqrt{x^2+y^2} \quad | \ \text{-2rx}$$

$$x^2 + y^2 - 2rx = b \cdot \sqrt{x^2+y^2} \quad | \ \text{quadrieren:}$$

$$\left(x^2 + y^2 - 2rx\right)^2 = b^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \quad \text{(K)}$$

Zusatz: Es stellt sich die berechtigte Frage, was mit dem Punkt P_1 geschieht, denn er liegt ja offenbar auch auf der Pascalschen Schnecke.

Aus (1) folgt $\overline{OP_1} = e = 2r \cdot \cos(\varphi) - b$ (3)

Im Dreieck OAP_1: $e^2 = x_1^2 + y_1^2$ und $\cos(\varphi) = \dfrac{x_1}{e} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

In (3): $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2r \cdot \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} - b \quad | \cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2rx_1 - b \cdot \sqrt{x_1^2+y_1^2} \quad | \ \text{-2rx}_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 2rx_1 = -b \cdot \sqrt{x_1^2+y_1^2} \quad | \ \text{quadrieren:}$$

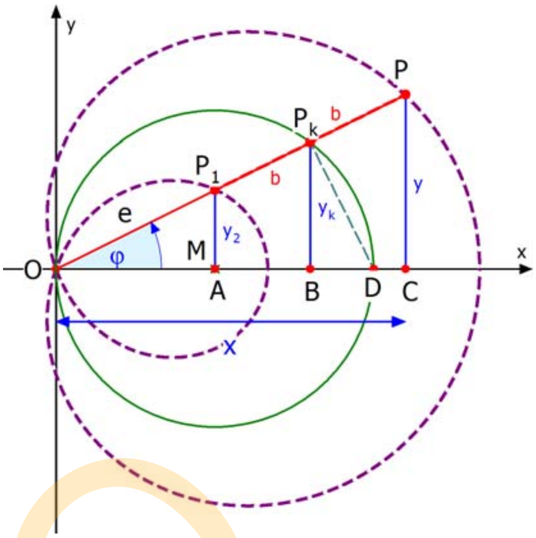
$$\left(x_1^2 + y_1^2 - 2rx_1\right)^2 = b^2 \cdot \left(x_1^2 + y_1^2\right)$$

Also erfüllt auch P_1 die Kurvengleichung (K).

2. Herleitung: *(Mit Strahlensatz, Pythagoras und Kreisgleichung)*

Vorarbeit:

Zunächst kann man folgende vier Beziehungen ablesen:



(1): $P_k \in k$: $\quad (x_k - r)^2 + y_k^2 = r^2$

ergibt $\quad x_k^2 - 2x_k r + y_k^2 = 0$

(2) 2. Strahlensatz: $\quad \frac{y}{x} = \frac{y_k}{x_k} = \frac{e+2b}{e+b}$

(3) Pythagoras: $\quad \overline{AB}^2 + \overline{BP_k}^2 = \overline{OP_k}^2$

Ergibt $\quad x_k^2 + y_k^2 = (e+b)^2$

(4) Pythagoras: $\quad \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{OP}^2$

Ergibt $\quad x^2 + y^2 = (e+2b)^2$

Das sind 4 Gleichungen. Eine muss übrigbleiben und drei braucht man um x_k, y_k und e zu eliminieren.

Aus (3) folgt: $\quad (e+b)^2 = x_k^2 + y_k^2$ also $e+b = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ und $e = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} - b$

In (4): $\quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x_k^2 + y_k^2} - b + 2b\right)^2 = \left(\sqrt{x_k^2 + y_k^2} + b\right)^2 \quad (5)$

Aus (1) folgt: $\quad x_k^2 + y_k^2 = 2x_K r \quad (6)$

In (5) einsetzen: $\quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2x_k r} + b\right)^2 \quad (7)$

Wie kann nun x_K loswerden?

Aus (2) folgt: $\quad \frac{y}{x} = \frac{y_k}{x_k} \Rightarrow y_k = \frac{y \cdot x_k}{x}$

Einsetzen in (6): $\quad x_k^2 + \frac{y^2 x_k^2}{x^2} = 2x_K r \quad | : x_k \neq 0$ sonst sinnlos.

$$x_k + \frac{y^2 x_k}{x^2} = 2r \Rightarrow x_k \cdot x^2 + y^2 \cdot x_k = 2rx^2 \text{ bzw. } x_K \cdot (x^2 + y^2) = 2rx^2$$

$$x_K = \frac{2rx^2}{x^2 + y^2} \quad (8)$$

Einsetzen in (7): $\quad x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2r \cdot \frac{2rx^2}{x^2+y^2}} + b\right)^2$ bzw. $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{4r^2x^2}{x^2+y^2}} + b\right)^2$

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{4r^2x^2}{x^2+y^2}} \frac{2rx}{\sqrt{x^2+y^2}} + b\right)^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2rx}{\sqrt{x^2+y^2}} + b \quad |$$

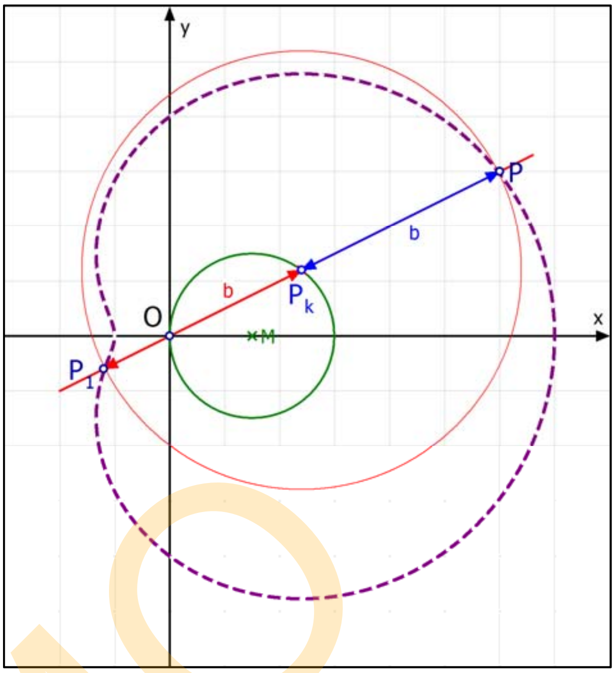
$$x^2 + y^2 = 2rx + b \cdot \sqrt{x^2+y^2} \quad | \text{ -2rx}$$

$$x^2 + y^2 - 2rx = b \cdot \sqrt{x^2+y^2} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = b^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

Besonderheiten dazu:

Hier die entsprechende Abbildung für den Fall, dass 2r kleiner als b ist.



Der Kreisradius ist 1,5. Die Strecke b = 4.
Um von P_k aus die beiden Kurvenpunkte P und P_1 zu finden, habe ich einen Kreis um P_1 mir Radius b = 4 gezeichnet.

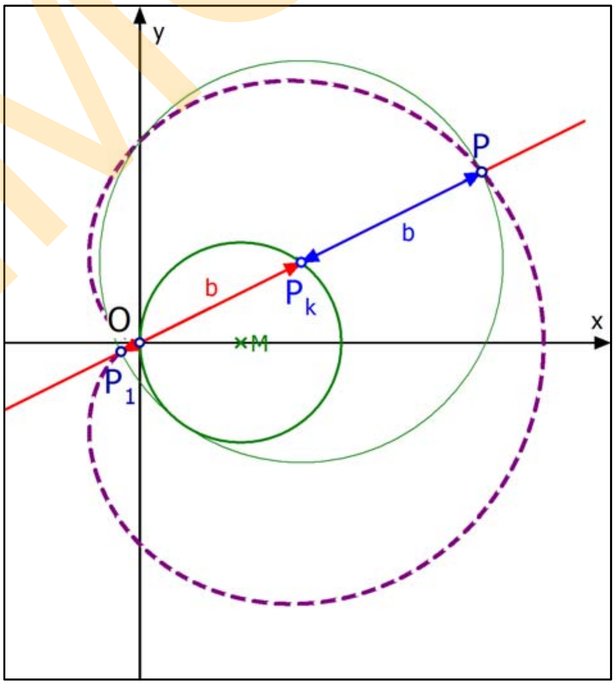
Man erkennt, dass nun die Kurve keine Schleife mehr macht.

Allerdings gehört der Ursprung als <u>isolierter Punkt</u> zur Kurve dazu. Das erkennt man, wenn man mit $(0\,|\,0)$ die Punktprobe in der Gleichung

$$\left(x^2+y^2-2rx\right)^2 = b^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$$

macht.

Nun die entsprechende Abbildung für den Fall 2r = b.



Liegt P_k auf der x-Achse rechts von M, dann liegt auch P rechts auf der x-Achse und wegen b= 2r fällt P_1 in den Ursprung.

Die Kurve hat nun im Ursprung eine Spitze.
Sie ist nun auch eine **Kardioide**!
Im Text 54112 werden für Kardioiden einige Gleichungen angegeben, die je nach Lage variieren. Eine davon lautet:

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2ax\cdot\left(x^2+y^2\right)-a^2y^2=0$$

Auf diese kommt man auch, wenn man obige Gleichung der Pascalschen Schnecke umrechnet.
Setzt man 2r = b ein, lautet sie: $\left(x^2+y^2-bx\right)^2 = b^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$.

Ich schreibe: $\left((x^2+y^2)-bx\right)^2 = b^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$ und folgere:

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2bx\cdot\left(x^2+y^2\right)+\cancel{b^2x^2} = \cancel{b^2x^2}+b\,x^2$$

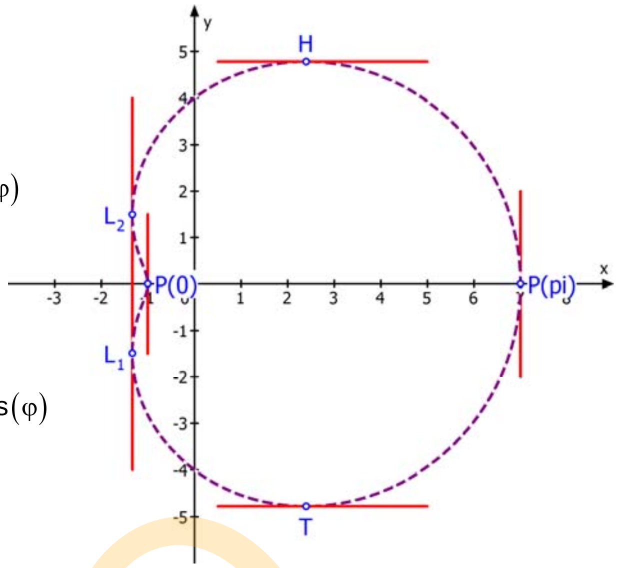
Und das ist dann schon die Kardioiden-Gleichung mit b statt a.

Außerdem ist die jede Pascalsche Schnecke auch eine **Kreis-Konchoide**. Vergleichen Sie dazu die Seiten 13 bis 15 im Text 54120.

3 Berechnung der Extrempunkte in x- und y-Richtung.

3.1

$$x(\varphi) = 3\cdot\cos^2(\varphi) - 4\cdot\cos(\varphi)$$
$$y(\varphi) = 3\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sin(\varphi)$$



1. Ableitung:

$$\dot{x}(\varphi) = 6\cdot\cos(\varphi)\cdot(-\sin(\varphi)) + 4\cdot\sin(\varphi)$$
$$\dot{x}(\varphi) = 4\cdot\sin(\varphi) - 6\cdot\underbrace{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}_{\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)}$$
$$\dot{x}(\varphi) = 4\cdot\sin(\varphi) - 3\cdot\sin(2\varphi)$$

$$\dot{y}(\varphi) = 3\left[-\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] - 4\cdot\cos(\varphi)$$
$$\dot{y}(\varphi) = 3\cdot\cos(2\varphi) - 4\cdot\cos(\varphi)$$

2. Ableitung:

$$\ddot{x}(\varphi) = 4\cdot\cos(\varphi) - 6\cdot\cos(2\varphi)$$
$$\ddot{y}(\varphi) = -6\cdot\sin(2\varphi) + 4\cdot\sin(\varphi)$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte in y-Richtung: $\dot{y}(\varphi) = 0$ für $\varphi \in [0\,;2\pi[$

$$3\cdot\cos^2(\varphi) - 3\cdot\sin^2(\varphi) - 4\cdot\cos(\varphi) = 0$$

Mit $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$:

$$3\cdot\cos^2(\varphi) - 3\cdot(1 - \cos^2(\varphi)) - 4\cdot\cos(\varphi) = 0$$
$$6\cdot\cos^2(\varphi) - 4\cdot\cos(\varphi) - 3 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos(\varphi)$:

$$\cos(\varphi) = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 6\cdot(-3)}}{2\cdot 6} = \frac{4 \pm \sqrt{88}}{12} \approx \begin{cases} 1{,}115 \\ -0{,}4484 \end{cases}$$

Die Gleichung $\cos(\varphi) = 1{,}115$ hat keine reelle Lösung.

Zu $\cos(\varphi) = -0{,}4484$ gibt es im Intervall $[0\,;2\pi[$ zwei Lösungen (2. und 3. Quadrant)

$\varphi_1 \approx 2{,}036$ und $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 \approx 4{,}247$

Zugehörige Kurvenpunkte: $T(2{,}398 \mid -4{,}777)$ sowie $H(2{,}398 \mid 4{,}777)$.

Dass T ein Tiefpunkt ist, folgt aus $\ddot{y}(2{,}036) > 0$ und H ist ein Hochpunkt wegen $\ddot{y}(4{,}247) < 0$.

Notwendige Bedingung für Extremwerte in x-Richtung: $\dot{x}(\varphi) = 0$ für $\varphi \in [0\,;2\pi[$

$$4\cdot\sin(\varphi) - 6\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = 0$$
$$\sin(\varphi)\cdot\left[4 - 6\cdot\cos(\varphi)\right] = 0$$

1. Faktor = 0: $\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi_3 = 0,\ \varphi_4 = \pi$

Kurvenpunkte: Zu $\varphi_3 = 0$: $R_1(-1 \mid 0)$

zu $\varphi_4 = \pi$: $R_2(7 \mid 0)$

2. Faktor = 0: $6\cdot\cos(\varphi) = 4 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{2}{3}$ mit 2 Lösungen im 1. und 4. Feld:

$\varphi_5 \approx 0{,}841$ und $\varphi_6 \approx 5{,}442$

Kurvenpunkte: zu $\varphi_5 \approx 0{,}841$: $L_1(-1{,}33 \mid -1{,}49)$

zu $\varphi_6 \approx 5{,}442$: $L_2(-1{,}33 \mid 1{,}49)$

Hinreichende Bedingungen mit $\ddot{x}(\varphi) = 4 \cdot \cos(\varphi) - 6 \cdot \cos(2\varphi)$

$\ddot{x}(0) = 4 \cdot \cos(0) - 6 \cdot \cos(0) = 4 - 6 < 0$ Maximum, Rechtspunkt.

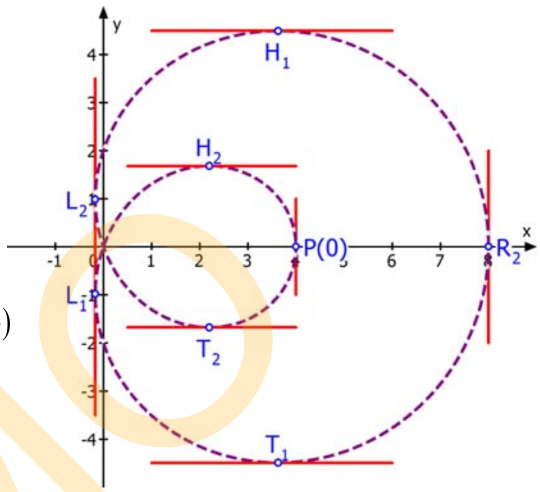
$\ddot{x}(\pi) = 4 \cdot \cos(\pi) - 6 \cdot \cos(2\pi) = -4 - 6 < 0$ Maximum, Rechtspunkt.

$\ddot{x}(0{,}841) = 4 \cdot \cos(0{,}841) - 6 \cdot \cos(2 \cdot 0{,}841) > 0$ Minimum, Linkspunkt.

$\ddot{x}(5{,}422) = 4 \cdot \cos(5{,}422) - 6 \cdot \cos(2 \cdot 5{,}422) > 0$ Minimum, Linkspunkt.

3.2

$$x(\varphi) = 6 \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(\varphi) = 6 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - 2 \cdot \sin(\varphi)$$



1. Ableitung:

$$\dot{x}(\varphi) = 12 \cdot \cos(\varphi) \cdot (-\sin(\varphi)) + 2 \cdot \sin(\varphi)$$
$$\dot{x}(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) - 12 \cdot \underbrace{\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}_{\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)}$$
$$\dot{x}(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) - 6 \cdot \sin(2\varphi)$$

$$\dot{y}(\varphi) = 6\left[-\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] - 2 \cdot \cos(\varphi)$$
$$\dot{y}(\varphi) = 6 \cdot \cos(2\varphi) - 2 \cdot \cos(\varphi)$$

2. Ableitung:

$$\ddot{x}(\varphi) = 2 \cdot \cos(\varphi) - 12 \cdot \cos(2\varphi)$$
$$\ddot{y}(\varphi) = -12 \cdot \sin(2\varphi) + 2 \cdot \sin(\varphi)$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte in y-Richtung: $\dot{y}(\varphi) = 0$ für $\varphi \in [0\,;2\pi[$

$$6 \cdot \cos^2(\varphi) - 6 \cdot \sin^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\varphi) = 0$$

Mit $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$:

$$6 \cdot \cos^2(\varphi) - 6 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) - 2 \cdot \cos(\varphi) = 0$$
$$12 \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\varphi) - 6 = 0 \quad |:2$$
$$6 \cdot \cos^2(\varphi) - \cos(\varphi) - 3 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos(\varphi)$:

$$\cos(\varphi) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{12} \approx \begin{cases} -0{,}629 \\ 0{,}795 \end{cases}$$

Zu $\cos(\varphi) = -0{,}629$ gibt es im Intervall $[0\,;2\pi[$ zwei Lösungen (2. und 3. Quadrant)

$$\varphi_1 \approx 2{,}251 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 \approx 4{,}032$$

Zu $\cos(\varphi) = 0{,}795$ gibt es im Intervall $[0\,;2\pi[$ zwei Lösungen (1. und 4. Quadrant)

$$\varphi_3 \approx 0{,}652 \quad \text{und} \quad \varphi_4 = 2\pi - \varphi_3 \approx 5{,}631$$

Zugehörige Kurvenpunkte:

Zu $\varphi_1 \approx 2{,}251$:	$T_1(2{,}251 \mid -4{,}489)$	Tiefpunkt
zu $\varphi_2 \approx 4{,}032$:	$H_1(3{,}633 \mid 4{,}489)$	Hochpunkt
zu $\varphi_1 \approx 0{,}652$:	$H_2(2{,}201 \mid 1{,}680)$	Tiefpunkt
zu $\varphi_4 \approx 5{,}631$:	$T_2(2{,}201 \mid -1{,}680)$	Hochpunkt.

Hinreichende Bedingungen mit $\ddot{y}(\varphi) = -12 \cdot \sin(2\varphi) + 2 \cdot \sin(\varphi)$

z. B.: $\ddot{y}(2{,}251) = -12 \cdot \sin(2 \cdot 2{,}251) + 2 \cdot \sin(2{,}251) > 0 \;\Rightarrow\;$ Minimum

usw.

Notwendige Bedingung für Extremwerte in x-Richtung: $\dot{x}(\varphi)=0$ für $\varphi \in [0;2\pi[$

d. h. $2\cdot\sin(\varphi)-12\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)=0$

$2\cdot\sin(\varphi)\cdot(1-6\cdot\cos(\varphi))=0$

1. Faktor = 0: $\sin(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi_5=0,\ \varphi_6=\pi$

2. Faktor = 0: $6\cdot\cos(\varphi)=1 \Leftrightarrow \cos(\varphi)=\frac{1}{6}$ mit 2 Lösungen im 1. und 4. Feld:

$\varphi_7 \approx 1{,}403$ und $\varphi_8=2\pi-\varphi_7\approx 4{,}880$

Kurvenpunkte:	Zu $\varphi_5=0$:	$R_1(4\,\vert\,0)$	Rechtspunkt
	zu $\varphi_6=\pi$:	$R_2(8\,\vert\,0)$	Rechtspunkt
	zu $\varphi_7\approx 1{,}403$:	$L_1(-0{,}167\,\vert\,-0{,}984)$	Linkspunkt
	zu $\varphi_8\approx 4{,}880$:	$L_2(-0{,}167\,\vert\,0{,}984)$	Linkspunkt

Hinreichende Bedingungen mit $\ddot{x}(\varphi)=2\cdot\cos(\varphi)-12\cdot\cos(2\varphi)$:

z. B.: $\ddot{x}(0)=2\cdot\cos(0)-12\cdot\cos(2\cdot 0)=2-12<0 \Rightarrow$ Maximum

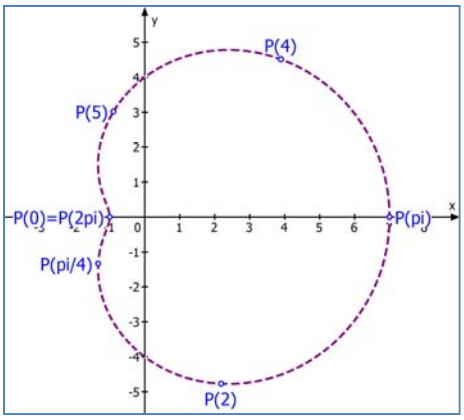
$\ddot{x}(1{,}403)=2\cdot\cos(1{,}403)-12\cdot\cos(1{,}403\cdot 2) \Rightarrow 0 \Rightarrow$ Minimum.

4 Fläche einer Pascalschen Schnecke

1. Weg: Mit den Parametergleichungen

Ich berechne eine Beispielfläche, und zwar für die Kurve mit r = 1,5 und b = 4: Ihre Parametergleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 3\cdot\cos^2(\varphi) - 4\cdot\cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= 3\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sin(\varphi) \end{aligned}$$



Für die Fläche gilt (Differentialgeometrie 54011 Seite 32):

$$\boxed{A = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi)\cdot\dot{x}(\varphi)\,d\varphi = \ldots}$$

Mit $\dot{x}(\varphi) = 6\cdot\cos(\varphi)\cdot(-\sin(\varphi)) + 4\cdot\sin(\varphi) = 4\cdot\sin(\varphi) - 6\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ folgt

$$A = \int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \big(3\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) - 4\cdot\sin(\varphi)\big)\big(4\cdot\sin(\varphi) - 6\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\big)\,d\varphi$$

Berechnung der Stammfunktion:

$$F(\varphi) = \int\big(12\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) - 16\cdot\sin^2(\varphi) - 18\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) + 24\cdot\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\big)\,d\varphi$$

$$F(\varphi) = \int\big(36\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) - 16\cdot\sin^2(\varphi) - 18\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\sin(\varphi)^2\big)\,d\varphi$$

$$F(\varphi) = 36\underbrace{\int\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_1(\varphi)} - 16\underbrace{\int\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_2(\varphi)} - 18\underbrace{\int\cos^2(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_3(\varphi)} \qquad (1)$$

Berechnung der Teilintegrale:

$F_1(\varphi) = \int\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi$ mit der Substitution $u = \sin(\varphi) \Rightarrow du = \cos(\varphi)\,d\varphi$

$$F_1(\varphi) = \int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 = \tfrac{1}{3}\cdot\sin^3(\varphi)$$

$F_2(\varphi) = \int\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi$ mit partieller Integration: $u' = \sin(\varphi) \Rightarrow u = -\cos(\varphi)$, $v = \sin(\varphi) \Rightarrow v' = \cos(\varphi)$

Formel: $\int u'\cdot v\cdot dx = [u\cdot v] - \int v'\cdot u\cdot dx$

$$\int\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + \int\cos^2(\varphi)\,d\varphi \qquad \cos^2(\varphi) = 1 - \sin^2(\varphi)$$

$$\int\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + \int\big(1 - \sin^2(\varphi)\big)\,d\varphi$$

$$\int\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\,d\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + \varphi - \int\sin^2(\varphi)\,d\varphi \qquad | + \int\sin^2(\varphi)$$

$$2\int\sin^2(\varphi)\,d\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + \varphi = -\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi) + \varphi$$

$$\int\sin^2(\varphi)\,d\varphi = -\tfrac{1}{4}\sin(2\varphi) + \tfrac{1}{2}\varphi \qquad (2)$$

$F_3(\varphi) = \int\cos^2(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi$ Trigonometrische Formel: $2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$

$F_2(\varphi) = \tfrac{1}{4}\int\cdot\sin^2(2\varphi)\,d\varphi$ Substitution: $z = 2\varphi \Rightarrow dz = 2\cdot d\varphi \Rightarrow d\varphi = \tfrac{1}{2}dz$

$$F_2(\varphi) = \tfrac{1}{4}\int\sin^2(2\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{8}\int\sin^2(z)\,dz$$

Mittels (2) folgt:

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{8}\int \sin^2(z)\,dz = \frac{1}{8}\cdot\left[-\frac{1}{4}\sin(2z) + \frac{1}{2}z\right] = -\frac{1}{32}\sin(2z) + \frac{1}{16}z$$

Rücksubstitution mit $z = 2\varphi$ führt zu

$$F_2(\varphi) = -\frac{1}{32}\sin(4\varphi) + \frac{1}{8}\varphi$$

Zusammensetzen in (1):

$$F(\varphi) = 36\underbrace{\int \cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_1(\varphi)} - 16\underbrace{\int \sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_2(\varphi)} - 18\underbrace{\int \cos^2(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi}_{F_3(\varphi)}$$

$$F(\varphi) = 36\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\sin^3(\varphi)\right) - 16\cdot\left(-\frac{1}{4}\sin(2\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\right) - 18\cdot\left(-\frac{1}{32}\sin(4\varphi) + \frac{1}{8}\varphi\right)$$

$$F(\varphi) = 12\cdot\sin^3(\varphi) + 4\cdot\sin(2\varphi) - 8\varphi + \frac{9}{16}\cdot\sin(4\varphi) - \frac{9}{4}\varphi$$

$$F(\varphi) = 12\cdot\sin^3(\varphi) + 4\cdot\sin(2\varphi) + \frac{9}{16}\cdot\sin(4\varphi) - \frac{41}{4}\varphi$$

Ich berechne zuerst die halbe Fläche:

$$\frac{1}{2}A = -\left[F(\varphi)\right]_0^{\pi} = -\left[F(\pi) - F(0)\right] = F(0) - F(\pi)$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil die Fläche für $\varphi = 0$ bis $= \pi$ unter der x-Achse liegt.

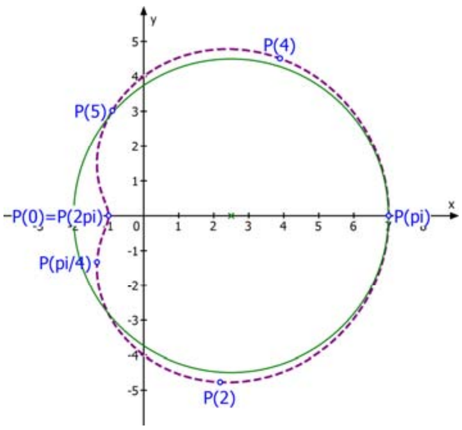
Nebenrechnungen:

$$F(0) = 12\cdot\sin^3(0) + 4\cdot\sin(0) + \frac{9}{16}\cdot\sin(0) - \frac{41}{4}\cdot 0 = 0$$

$$F(\pi) = 12\cdot\sin^3(\pi) + 4\cdot\sin(\pi) + \frac{9}{16}\cdot\sin(\pi) - \frac{41}{4}\cdot\pi = -\frac{41}{4}\cdot\pi$$

Halbe Fläche: $\frac{1}{2}A = 0 - \left(-\frac{41}{4}\pi\right) = \frac{41}{4}\pi$

Ganze Fläche: $A = \frac{41}{2}\pi \approx 64{,}6\ (FE)$



Man kann eine einfache Kontrolle zum Ergebnis machen:
Der Kreis um $M(2{,}5\,|\,0)$ mit Radius 4,5 hat eine ähnlich große Fläche und den Inhalt: $A_K = \pi\cdot 4{,}5^2 \approx 63{,}6\ (FE)$

2. Weg: Über die Polarkoordinatengleichung

Für die Fläche gilt (laut 54011 Seite 35): - $A = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2(\varphi)\,d\varphi$

Unsere Kurve hat die Gleichung $R(\varphi) = 2r\cdot\cos(\varphi) + b = 3\cdot\cos(\varphi) + 4$

Also: $A = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(3\cdot\cos(\varphi)+4\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(9\cdot\cos^2(\varphi) + 24\cdot\cos(\varphi) + 16\right)d\varphi$

Berechnung der Stammfunktion:

$$F(\varphi) = \frac{9}{2}\int\cos^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int(24\cdot\cos(\varphi)+16)\,d\varphi$$

$$F(\varphi) = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)+\varphi\right) + 12\cdot\sin(\varphi) + 8\varphi \qquad *)$$

$$F(\varphi) = \frac{9}{4}\underbrace{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}_{\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)} + \frac{9}{4}\varphi + 12\cdot\sin(\varphi) + 8\varphi$$

$$F(\varphi) = \frac{9}{8}\sin(2\varphi) + 12\cdot\sin(\varphi) + \frac{41}{4}\varphi$$

$$A = \left[F(\varphi)\right]_0^{2\pi} = F(2\pi) - F(0)$$

$$F(2\pi) = \frac{9}{8}\sin(4\pi) + 12\cdot\sin(2\pi) + \frac{41}{4}\cdot 2\pi = \frac{41}{2}\pi$$

$$F(0) = \frac{9}{8}\sin(0) + 12\cdot\sin(0) + \frac{41}{4}\cdot 0 = 0$$

Ergebnis: $A = \frac{41}{2}\pi$ (FE)

*) Das Integral $\int\cos^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)+\varphi\right)$ wird ähnlich wie auf der Seite zuvor das Integral mit $\int\sin^2(\varphi)\,d\varphi$ mit partieller Integration berechnet.

Hinweis: Hat die Kurve eine zusätzliche innere Schleife, liefert die analoge Rechnung die Summe beider Flächen.